15.12.2015

# MTÖ 305 SOYUT CEBİR I
## 2015-2016 GÜZ DÖNEMİ QUİZ

**AD-SOYAD :** CEVAP ANAHTARI

**ÖĞRENCİ NUMARASI :**

| 1 (5 p) | 2 (5 p) | 3 (3 p) | 4 (6 p) | 5 (6 p) | T (25 p) |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**S.1.** $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ çarpımsal grubu devirli midir? Açıklayınız.

**S.2.** $G = \langle x \rangle$ ve $|x| = 30$ olsun. $\langle x^9 \rangle$ altgrubunun tüm üreteçlerini listeleyiniz.

**S.3.** $S_3$ grubunun altgrup kafes diyagramını belirleyiniz.

**S.4.** $G$ bir sonlu grup, $N \trianglelefteq G$ ve $x \in G$ olsun.

(a) $xN$ 'nin $\dfrac{G}{N}$ içindeki mertebesinin, $x$ 'in $G$ içindeki mertebesini böldüğünü ispatlayınız.

(b) $\left(|x|, \left|\dfrac{G}{N}\right|\right) = 1$ ise $x \in N$ olduğunu gösteriniz.

**S.5.** "$G$ bir Abel gruptur $\Longleftrightarrow \phi : G \to G$, $\phi(x) = x^{-1}$ ile tanımlanan dönüşüm bir otomorfizmadır"

ifadesini ispatlayınız.

Başarılar!

Ders Sorumlusu: Dr. Pınar Aydoğdu

1) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

old. dan

$G = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\rangle$ 'dir. Yani,

G devirlidir.

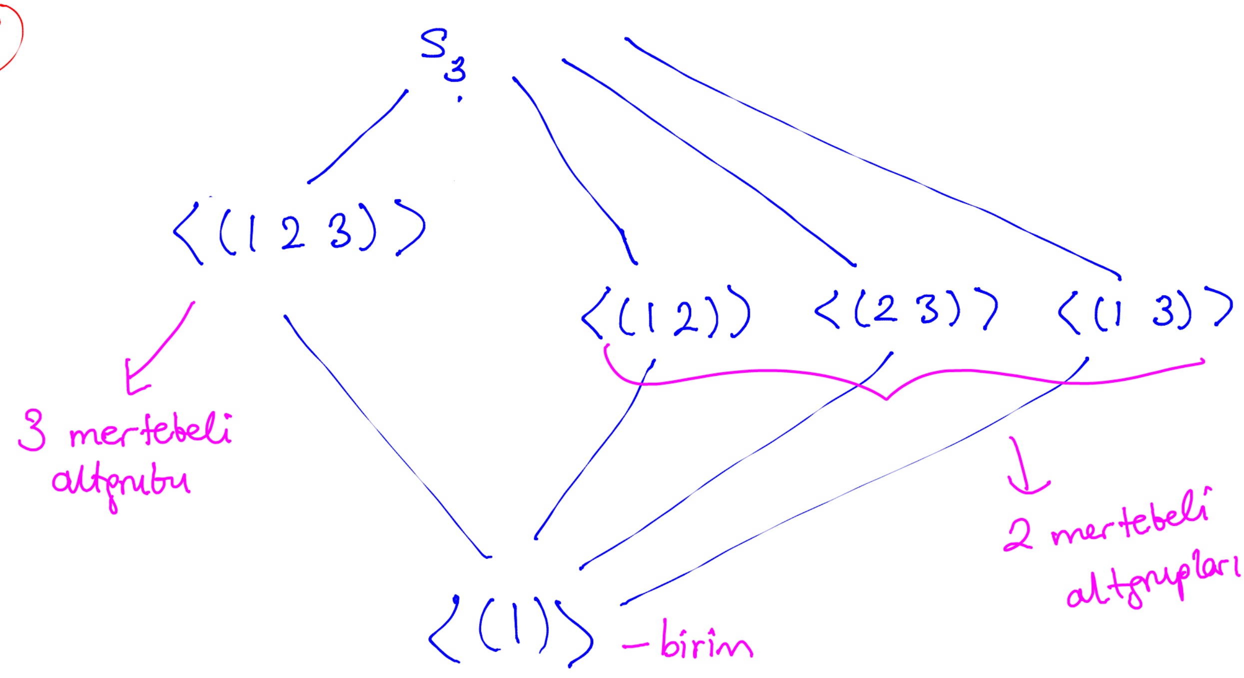
2) $|x^9| = \dfrac{|x|}{(|x|, 9)} = \dfrac{30}{(30,9)} = \dfrac{30}{3} = 10$ olur.

O halde, $\langle x^9 \rangle$ grubunun üreteçleri $(k,10)=1$ koşulunu sağlayan 10'dan küçük tamsayılar için $\langle x^{9k} \rangle$ olur.

Böylece, $k = 1, 3, 7, 9$ olacağından

$\langle x^9 \rangle = \langle x^{27} \rangle = \langle x^3 \rangle = \langle x^{21} \rangle$ elde edilir.

3)




4) (a) $|xN| = k$ ve $|x| = t$ olsun. $k \mid t$ old. göstereceğiz.

$|x| = t$ ise $x^t = e$'dir.

Buradan,

$$(xN)^t = x^t N = eN = N \text{ ve } |xN| = k \text{ old.dan}$$

$k \mid t$ elde edilir.

(b) $\left(|x|, \left|\frac{G}{N}\right|\right) = 1$ olsun. $x \in N$ old. göstereceğiz.

$|x|k + \left|\frac{G}{N}\right|t = 1$ ol.şek. $k, t \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$x = x^1 = x^{|x|.k + |G/N|t} = \underbrace{x^{|x|.k}}_{e} \cdot x^{|G/N|.t} = x^{|G/N|t}$$

$$\Rightarrow xN = x^{|G/N|t} N = (xN)^{|G/N|t} = N \Rightarrow x \in N \text{ bulunur.}$$

(5) $G$ Abel $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l}\phi: G \to G \\ \quad x \mapsto x^{-1}\end{array}$ bir otomorfizmadır:

$\underline{\Rightarrow}$: $G$ Abel olsun.

$\phi$ iyi tanımlıdır: $x=y \Leftrightarrow x^{-1}=y^{-1} \Leftrightarrow \phi(x)=\phi(y)$
ve 1-1'dir

$\phi$ örtendir: $y\in G$ için $x=y^{-1}$ alınırsa $\phi(x)=\phi(y^{-1})=(y^{-1})^{-1}=y$ olur.

$\phi$ bir grup hom.dur: $x,y\in G$ için

$$\phi(xy)=(xy)^{-1}\underset{\substack{\downarrow \\ G \text{ Abel}}}{=}x^{-1}y^{-1}=\phi(x).\phi(y) \text{ olur.}$$

$\underline{\Leftarrow}$: $\phi$ bir otomorfizma olsun.

$a,b\in G$ alalım.

$$\begin{aligned} ab=((ab)^{-1})^{-1}=(b^{-1}a^{-1})^{-1}=(\phi(b)\phi(a))^{-1} &= \phi(a)^{-1}\phi(b)^{-1} \\ &= \phi(a^{-1}).\phi(b^{-1}) \\ &= \phi(a^{-1}b^{-1}) \\ &= \phi((ba)^{-1}) \\ &= ba \end{aligned}$$

old.dan $G$ Abeldir.